2002年　東大数学　文系第1問

2式を連立して、yを消去すると、

$$2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta = -2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$$

$$2\sqrt{3}(x^2-2\cos\theta x+\cos^2\theta)+\sin\theta = -2\sqrt{3}(x^2+2\cos\theta x+\cos^2\theta)-\sin\theta$$

$$4\sqrt{3}x^2 + 4\sqrt{3}\cos^2\theta + 2\sin\theta = 0$$

この2次方程式の判別式をDとすると、$D>0$ となればよい。

$$D = 0^2 - 4\times 4\sqrt{3}(4\sqrt{3}\cos^2\theta+2\sin\theta) > 0$$

$$4\sqrt{3}\cos^2\theta + 2\sin\theta < 0$$

$$4\sqrt{3}(1-\sin^2\theta) + 2\sin\theta < 0$$

$$2\sqrt{3}\sin^2\theta - \sin\theta - 2\sqrt{3} > 0$$

$$(2\sin\theta+\sqrt{3})(\sqrt{3}\sin\theta-2) > 0$$

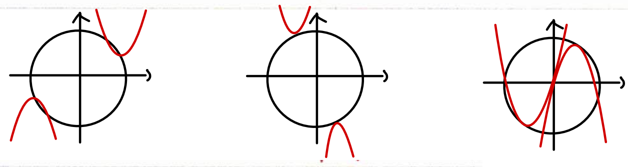
$\sqrt{3}\sin\theta-2$ は常に負なので

$2\sin\theta+\sqrt{3}<0$　　$\sin\theta < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって、$\underline{240^\circ < \theta < 300^\circ}$

補　2つの放物線は合同。
頂点は、$(\cos\theta, \sin\theta)$ と $(-\cos\theta, -\sin\theta)$ なので、原点対称である。

$\theta=30^\circ$　　$\theta=120^\circ$　　$\theta=240^\circ$



交わらない。　交わらない。　原点で接する

θが小さいと、交わらない

$\theta=240^\circ$で、原点で接する。